www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE SESSION 1990

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION AUX ECOLES SUPERIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MECANIQUE-ELECTRICITE
DE TOPOGRAPHIE

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTA : Les deux problèmes sont indépendants.

Les parties **I.** *et* **II.** *du premier problème peuvent être traitées dans un ordre quelconque.*

PREMIER PROBLEME

Le plan affine euclidien réel est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note x'Ox et y'Oy les axes de coordonnées associés. Dans toute la suite on suppose $a \in \mathbb{R}_+^*$

I - On note (C) la courbe représentative de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$; ch désigne le cosinus hyperbolique.

M(x) représente le point de (C) d'abscisse x ; on note s(x) l'abscisse curviligne de M(x) sur (C), d'origine O (c'est-à-dire $s(O) = 0$) et de même signe que x .

Dans la suite, pour simplifier l'écriture on note M au lieu de M(x). On définit alors le vecteur unitaire $\vec{\tau}$ de la tangente orientée à M en (C) par $\vec{\tau} = \frac{d\vec{OM}}{ds}$, dont un angle polaire $(\vec{i}, \vec{\tau})$ a une mesure φ modulo 2π .

Le rayon de courbure en M à (C) est noté R ; on désigne par I le centre de courbure en M à (C), par N le point d'intersection de x'Ox et de la normale en M à (C), par P la projection orthogonale de M sur x'Ox et par B la projection orthogonale de P sur la tangente en M à (C).

1. a - Calculer s(x) ; trouver une relation entre f(x), s(x) et a .

b - Calculer $\|\vec{PB}\|$ en fonction de a, et $\|\vec{BM}\|$ en fonction de s(x) .

c - Calculer l'aire du domaine plan limité par les axes x'Ox , y'Oy , la droite (MP) et la courbe (C) entre A, de coordonnées (0 , a) , et M .
Comparer cette aire à celle du triangle P M B .

2. Montrer que les points I et N sont symétriques par rapport à M. Trouver une relation entre $\|\vec{MN}\|$, f(x) et a .

3. Trouver une relation entre s(x) , R(x) et a . On considère un repère orthonormé BXY, d'origine B , dont l'axe BX est la droite (BM). Déterminer, dans ce repère, l'ensemble des points I , lorsque x varie.

4. On considère les points variables $M_1(x_1)$ et $M_2(x_2)$ de (C), en lesquels les tangentes à (C) sont perpendiculaires.

a - Montrer que le produit $s(x_1) \cdot s(x_2)$ est constant et trouver sa valeur en fonction de a .

b - Montrer que $\frac{1}{R(x_1)} + \frac{1}{R(x_2)}$ est constant et trouver sa valeur en fonction de a .

II - Soit la fonction $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -a \ln(\cos \frac{x}{a}) \end{array}$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Donner une représentation graphique de la courbe (Γ) définie par :

$$y = g(x) \quad \text{et} \quad -\frac{\pi a}{2} < x < \frac{\pi a}{2}$$

2. On conserve les notations du début de la partie I - pour le point $M(x, g(x))$ de (Γ), en remplaçant (C) par (Γ).

a - Calculer $\varphi(x)$ en fonction de x et de a.

b - Calculer le rayon de courbure $R(x)$ en M à (Γ) en fonction de x et a.

c - Vérifier que la projection orthogonale de $\overrightarrow{MI}$ sur la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{i}$ a une norme constante que l'on calculera en fonction de a.

3. Calculer $s(x)$, puis exprimer $R(x)$ en fonction de $s(x)$ et de a.

DEUXIEME PROBLEME

E est l'ensemble des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On sait que E est un espace vectoriel réel. Dans tout le texte, n est un entier naturel et t une variable réelle. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}_n$ est l'ensemble des entiers k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. Enfin on note E_n l'ensemble des éléments de E de degré inférieur ou égal à n.

1. a - Etablir la convergence de l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n \, dt$, et calculer I_n.

On admettra la convergence des intégrales généralisées rencontrées dans la suite du problème, convergence justifiée par celle de I_n.

b - Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note $F_i = \left\{ P \in E, \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) t^i \, dt = 0 \right\}$.

En supposant F_i distinct de l'ensemble vide, montrer que F_i est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

c - Pour $n \geqslant 1$ on admet l'existence de fonctions P_n de E, de degré n, et telles que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} P_n(t) \, dt = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n, \int_0^{+\infty} e^{-t} P_n(t) t^i \, dt = 0.$$

Calculer $P_1(t)$ et $P_2(t)$.

d - Soit R_n un élément de E de degré n. On suppose :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \ i \leqslant n \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} R_n(t) t^i \, dt = 0.$$

Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t} \left[R_n(t) \right]^2 dt = 0$ et conclure pour R_n.

e - En déduire que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, définie au 1. c - est unique.

Tournez la page S.V.P.

2. Pour $n \geqslant 1$, P_n' est la dérivée d'ordre 1 de P.

a - Pour $n \geqslant 2$ et $2 \leqslant i \leqslant n$, calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t} P_n'(t)\, t^i\, dt$.

b - Pour $n \geqslant 1$, calculer $\int_0^{+\infty} te^{-t} P'_n(t)\, dt$; puis $\int_0^{+\infty} e^{-t} P'_n(t)\, dt$ en fonction de $P_n(0)$.

3. Pour $n \geqslant 2$, on note $S_{n-1}(t) = P'_n(t) - P'_{n-1}(t) + P_{n-1}(t)$.

a - Montrer que : $\forall i \in \mathbb{N}_n$, $\int_0^{+\infty} e^{-t} S_{n-1}(t)\, t^i\, dt = 0$.

On traitera d'abord le cas $n \geqslant 3$ et $2 \leqslant i \leqslant n-1$, puis les cas $i = 1$ et $i = n$.

b - Pour $n \geqslant 2$, calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t} S_{n-1}(t)\, dt$ en fonction de $P_{n-1}(0)$ et de $P_n(0)$.

Montrer que $S_{n-1}(t) = 0$, puis calculer $P_n(0)$ en fonction de n . On pourra utiliser $\int_0^{+\infty} te^{-t} \left[S_{n-1}(t)\right]^2 dt$.

4. a - Pour $n \geqslant 2$, calculer $P'_n(t) + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} P_i(t)$.

b - Pour $n \geqslant 1$, calculer dans $P_n(t)$, les coefficients des termes en t^n , puis en t (égaux si $n = 1$) .

5. a - Pour $n \geqslant 2$, on note e_n la fonction de E telle que $e_n(t) = t\, P_{n-1}(t)$,
e_0 la fonction constante de E de valeur 1 et $\forall i \in \mathbb{N}_{n-1}$, $e_i = P_i$.

Soit $B_{n+1} = (e_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$. Montrer que B_{n+1} est une base de E_n .

b - Pour $n \geqslant 2$, on note $P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ni}\, e_{n-i}(t)$.

En explicitant $P'_n(t)$, en utilisant $S_{n-1}(t) = 0$ et le terme de plus haut degré de P_{n-1} , calculer α_{no} en fonction de n .

c - Pour $n \geqslant 2$, en utilisant les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-t} P_n(t)\, dt$ et $\int_0^{+\infty} t\, e^{-t} P_n(t)\, dt$,
calculer $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ni}$, puis α_{nn} .

d - Pour $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t} P_p(t)\, t^{p+1}\, dt$ en fonction de p . On utilisera une intégration par parties.

Pour $n > 3$ et pour tout entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n-3$, déduire de ce qui précède la valeur de $\alpha_{n,n-p}$.

e - Pour $n > 3$ calculer α_{n1} et exprimer P_n comme combinaison linéaire de e_n , e_{n-1} et e_{n-2} .

f - Calculer $P_3(t)$ et justifier l'existence de la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, existence admise au 1. c - .

---------- o o o ◊ o o o ----------

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail